

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

7 februarie 2026

CLASA a VII-a

### BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

#### SUBIECTUL 1.

Fie numerele  $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$  și

$$y = (|3^{54} - 2^{90}| + 3^{2026} : 81^{493}) : (-4^{43}) + \sqrt{2025} + \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^4}.$$

a) Arătați că numărul  $x$  este rațional.

b) Verificați dacă  $3x$  și  $\sqrt{y}$  sunt elemente ale mulțimii  $A = \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid \frac{3z+1}{2z-5} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Soluție:

$$\text{a)} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{63}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} \quad (1p)$$

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$x = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad (1p)$$

$$\text{b)} \quad 3x = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 3 - 5} = \frac{7}{1} = 7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x \in A \quad (0,5p)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{54} = (3^3)^{18} = 27^{18} \\ 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18} \end{array} \right\} \Rightarrow |3^{54} - 2^{90}| = 2^{90} - 3^{54} \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{2026} : 81^{493} = 3^{2026} : 3^{4 \cdot 493} = 3^{54} \\ 4^{43} = 2^{2 \cdot 43} = 2^{86} \end{array} \right| \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2025} = 45 \\ 8 = \sqrt{64} \\ 5\sqrt{3} = \sqrt{125} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} = |8-5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - 8 \quad (1p)$$

$$y = (2^{90} - 3^{54} + 3^{54}) : (-2^{86}) + 45 + 5\sqrt{3} - 8 - 5\sqrt{3} + 4$$

$$y = -2^{90-86} + 45 - 8 + 4 = -2^4 + 41 = 25$$

$$\sqrt{y} = 5 \quad (1p)$$

$$5 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3 \cdot 5 + 1}{2 \cdot 5 - 5} = \frac{16}{5} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{y} \notin A \quad (0,5p)$$

## SUBIECTUL 2.

a) Arătați că numărul  $N = \sqrt{1 + 2025 \cdot \left[ \frac{2026^2}{2025} \right]}$ , este natural.

b) Aflați numărul rațional  $a$ , știind că numărul :

$(a - 2026)\sqrt{2027 - 2\sqrt{2026}} + \sqrt{2027 + 2\sqrt{2026}}$  este rațional.

Soluție:

$$\text{a) } \left[ \frac{2026^2}{2025} \right] = \left[ \frac{(2025+1)^2}{2025} \right] = \left[ \frac{2025^2 + 2 \cdot 2025 + 1}{2025} \right] = \left[ 2025 + 2 + \frac{1}{2025} \right] = 2027 \quad (2p)$$

$$N = \sqrt{1 + 2025 \cdot 2027} = \sqrt{1 + 2025 \cdot (2025 + 2)} = \sqrt{1 + 2 \cdot 2025 + 2025^2}$$

$$N = \sqrt{(1 + 2025)^2} = 2026 \quad (1p)$$

$$\text{b) } \sqrt{2027 - 2\sqrt{2026}} = \sqrt{(\sqrt{2026} - 1)^2} = \sqrt{2026} - 1 \quad (1p)$$

$$\sqrt{2027 + 2\sqrt{2026}} = \sqrt{(\sqrt{2026} + 1)^2} = \sqrt{2026} + 1 \quad (1p)$$

$$\begin{aligned} Z &= (a - 2026)\sqrt{2027 - 2\sqrt{2026}} + \sqrt{2027 + 2\sqrt{2026}} = (a - 2026)(\sqrt{2026} - 1) + \sqrt{2026} + 1 \\ &= \sqrt{2026}(a - 2026 + 1) - a + 2026 + 1 = \sqrt{2026}(a - 2025) - a + 2027 \end{aligned} \quad (1p)$$

$$Z \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}, \sqrt{2026} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a = 2025 \quad (1p)$$

## SUBIECTUL 3.

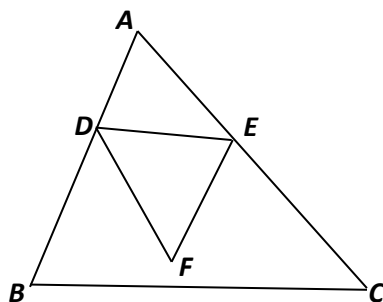
Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\angle A = x$ ,  $0 < x < 90^\circ$  și punctele  $D \in AB$ ,  $E \in AC$  astfel ca  $\angle DEC = 2x$ . Bisectoarele unghiurilor  $BDE$  și  $DEC$  se intersectează în  $F$ .

a) Demonstrați că  $E$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ADF$ .

b) Determinați  $x$  astfel încât patrulaterul  $ADFE$  să fie romb.

Soluție:

a)



$E$  - centru cercului circumscris  $\triangle ADF$  dacă  $EA = ED = EF$  (1p)

$$\angle DEF = \angle FEC = x$$

$$\angle BDF = \angle FDE = y$$

$$\angle DEC \text{ exterior } \triangle ADE \Rightarrow \angle DEC = \angle ADE + \angle DAE$$

$$2x = \angle ADE + x$$

$$\angle ADE = x$$

Deci  $\angle ADE = \angle DAE = x \Rightarrow \triangle ADE$  isoscel cu  $AE = ED$  (1p)

$$\angle ADB = 180^\circ \Rightarrow 2y + x = 180^\circ \quad (1p)$$

$$\triangle DEF : x + y + \angle F = 180^\circ \Rightarrow \angle F = y \quad (1p)$$

$$\angle F = \angle FDE = y \Rightarrow \triangle DFE \text{ isoscel cu } DE = EF \Rightarrow DE = EF = AE. \quad (1p)$$

b)

$$ADEF \text{ romb} \Rightarrow AD = AE$$

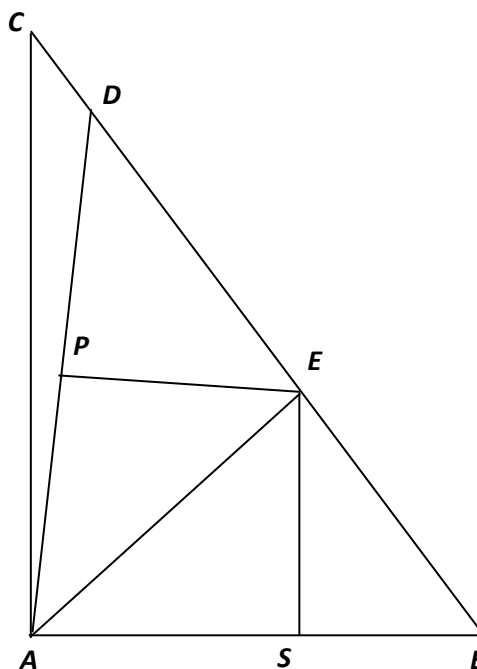
$$AE = ED \Rightarrow \triangle ADE \text{ echilateral} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow x = 60^\circ \quad (1p)$$

#### SUBIECTUL 4.

Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$  și  $\angle B = 60^\circ$ . Pe latura  $BC$  considerăm punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $\angle CAD = 10^\circ$ , ( $AE$  este bisectoarea unghiului  $BAD$  și  $AD = 12\text{cm}$ ). Determinați lungimea segmentului  $EC$ .

Soluție:



$$\angle BAC = 90^\circ, \angle CAD = 10^\circ \Rightarrow \angle DAB = 80^\circ \Rightarrow$$

$$\angle DAE = \angle BAE = 40^\circ (1),$$

$$\triangle ADB, \angle B = 60^\circ, \angle BAD = 80^\circ \Rightarrow \angle ADB = 40^\circ (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \triangle DAE \text{ isoscel} \quad (2p)$$

Construim  $EP \perp AD$  și  $ES \perp AB$ , cum ( $AE$  bisectoarea  $\angle BAD \Rightarrow \triangle APE \equiv \triangle ASE$  (I.U.), deci  $AP = AS$  (3)

$$EP \perp AD, \triangle DAE \text{ isoscel} \Rightarrow AP = PD = \frac{AD}{2} = 6 \text{ cm.} (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow AS = AP = 6 \text{ cm.} \quad (2p)$$

$$\triangle ESB, \angle S = 90^\circ, \angle B = 60^\circ \Rightarrow SB = \frac{EB}{2} = x \Rightarrow EB = 2x.$$

$$\triangle ABC, \angle A = 90^\circ, \angle B = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2AB \quad (1p)$$

$$\Rightarrow CE + EB = 2(AS + SB) \Rightarrow CE + 2x = 2 \cdot (6 + x) \Rightarrow CE = 12 \text{ cm.} \quad (2p)$$